Non-linear Approximation using Wavelets and its Application to Computer Tomography(ウェーブレットを用いた非線形近似とコンピュータ・トモグラフィへの応用)

著者	一條 健司
号	103
発行年	1998
URL	http://hdl.handle.net/10097/12785

氏　名（本籍）	一　條　健　司　　　　（青 森 県）
学 位 の 種 類	博　　士（情報科学）
学 位 記 番 号	情博　第１０３号
学位授与年月日	平成１１年3月２５日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研 究 科 、専 攻	東北大学大学院情報科学研究科（博士課程）情報基礎科学専攻
学位論文題目名	Non-linear Approximation using Wavelets and its Application to Computer Tomography (ウェーブレットを用いた非線形近似とコンピュータトモグラフィへの応用)
論文審査委員	（主　査） 東北大学教授　岡田 正巳　　東北大学教授　塚原 保夫 東北大学教授　内田 興二　　東北大学教授　金子　　誠 東北大学助教授　会田 茂樹

論 文 内 容 要 旨

1　はじめに

多くの科学技術分野において、解を求めたり現象の振る舞いを調べるために、数値計算やシミュレーションなど計算機を用いたデータ処理が有効な解析手段として広まっている。多くの場合、ある現象から得られる観測データには雑音が付加されており、雑音除去はデータ処理、特に信号、画像処理において重要な問題となる。このような問題は一般に $g_\varepsilon = Kf + \varepsilon z$ と定式化でき、一種の逆問題と見なすことができる。すなわち、現象を記述する作用素を K、未知の入力データを f、付加される雑音を εz としたとき、観測データ g_ε から、未知データ f を求める問題と見なせる。ここで、ε は小さい定数とする。

ところで近年、信号、画像などのデータ処理に有効な道具として、ウェーブレット解析が知られている。ウェーブレットは数学においては関数を表現する基底として、物理学や工学においても、本質的に似た方法が時間-周波数解析やフィルタバンクを構成する道具として独立に扱われていたが、1980 年代半ばに入り、これらが一つの概念として理論的に整備され、それからは急速に様々な分野に応用されるに至った。

さて、前述の逆問題に対して、我々は次の２点に着目したい。

(i) 観測信号からできるだけ f に近い $\tilde{f}_\varepsilon$ を構成する方法を導く。

(ii) 適当なノルムを導入し、近似誤差を評価する。

D. Donoho と I. Johnstone はウェーブレットを用いた雑音除去に関して基本的な研究を行なった。(1992-1995) 彼らは、信号 f がベゾフ空間に属し、z が白色雑音である場合について、g_ε をウェーブレット展開するときに、ある閾値関数を導入した非線形近似によって $\tilde{f}_\varepsilon$ を構成した。そして、L^2 ノルムにより誤差の評価を行ない、これが最適な近似であることを示した。

本論文では、D. Donoho らの議論よりもより一般的に信号を取り扱うことを考えた。すなわち、f がベゾフ空間に属し、z が決定的または確率的雑音である場合を考えた。そして、ウェーブレット展開で表される非線形近似の構成を工夫した。特に閾値関数により取り入れられるウェーブレット係数の解像度レベルを、ベソフ空間の滑らかさを表すパラメータで決めるようにした。この我々の方法により構成された $\tilde{f}_\varepsilon$ について、その近似誤差を L^2 ノルムより一般のベゾフノルムを用いて評価した結果、雑音の性質によらない統一的な評価を得ることができ

た。さらに、以上のような理論的拡張と並行して、我々の近似方法の性能をみるために数値シミュレーションを行なった。具体的には作用素 K がラドン変換である場合、すなわちコンピュータトモグラフィにおいて、我々の方法を用いた雑音除去に関するいくつかの実験を行なった。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、本論文で必要となるウェーブレット解析とベゾフ空間について簡単な準備を行なう。3節では、雑音が決定的な場合の誤差評価、4節では、雑音が確率的な場合の誤差評価について述べる。5節では、具体的な問題として取り上げたいトモグラフィについての準備をし、6節で3つの数値実験とその結果について述べる。最後に7節において結論を述べる。

2　準備：ウェーブレットとベゾフ空間について

この節では、本論文で必要となるウェーブレット解析とベゾフ空間についての簡単な準備を行なう。ウェーブレットについては、後での数値計算における便利性などから、多重解像度解析から定義し、コンパクトな台とある程度の滑らかさを持つ I. Daubechies のウェーブレットを用いることとした。ベゾフ空間については、B. Delyon と A. Juditsky によるウェーブレット係数を用いたベゾフノルムの特徴付けを用いた。

3　決定的雑音を含む逆問題について

この節では、雑音 z があるベゾフ空間に属するとき、作用素 K が恒等変換である場合と、ある条件をみたす一般の作用素である場合とについて調べた。我々は近似誤差の上からの評価にのみ興味があるので、K に対する条件は D. Donoho らの条件よりも緩いことに注意されたい。このとき我々は、ある正定数 J，M_j に対しウェーブレット展開により $\tilde{f}_\varepsilon$ を $\tilde{f}_\varepsilon = \sum_{j<J}\sum_{k} c_{j,k}\psi_{j,k} + \sum_{j\geqq J}\sum_{k} c_{j,k}\mathbb{1}_{\{|c_{j,k}|\geqq \varepsilon M_j\}}\psi_{j,k}$ と構成した。（ただし、$c_{j,k}$ は g_ε のウェーブレット係数）ここで、閾値関数 $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ における M_j や解像度レベルを設定する定数 J は、f の属するベゾフ空間の滑らかさによって決めていることを強調しておく。このとき次の誤差評価を得た。

$$\left\|f-\tilde{f}_\varepsilon\right\|_{B^{s_2}_{p\,1}} \leqq C\,\varepsilon^{\frac{s_1-s_2}{\alpha+s_1-s_3}} \quad (\text{ただし、}0<\varepsilon<1\text{、}C,\alpha\text{は定数で、}s_3<s_2<s_1)$$

4　確率的雑音を含む逆問題について

この節では雑音 z が確率的雑音である場合について述べる。具体的には、
(i) z のウェーブレット係数 $z_{j,k}$ が $\sup_j E\left[\sum_k |z_{j,k}|^{p_3}\, 2^{j\left(s_3+\frac{d}{2}-\frac{d}{p_3}\right)p_3}\right] \leqq 1$ をみたす場合、 (ii) z が白色雑音の場合、 (iii) z が Lévy 雑音の場合、 (iv) $z_{j,k}$ の分布が多項式オーダーで減衰する場合、 の4つの場合を考えた。そして前節と同様に $\tilde{f}_\varepsilon$ を構成したとき、これらの場合において次のような期待値をとった形での評価を得た。

$$E\left[\left\|f-\tilde{f}_\varepsilon\right\|^p_{B^{s_2}_{p\,p}}\right] \leqq C\,\varepsilon^{\frac{p(s_1-s_2)}{\alpha+s_1-s_3}} \quad (\text{ただし、}0<\varepsilon<1\text{、}C,\alpha\text{は定数で、}s_3<s_2<s_1)$$

さらに、(ii)、(iii) の場合、雑音が或るベゾフ空間に almost surely の意味で属することを示した。よってこれらの場合には、3 節と同様の評価に帰着できることが分かった。

5　コンピュータトモグラフィの基礎

前節までの理論的考察について、実際に作用素 K がラドン変換である場合の数値シミュレーションを行なうために、本節ではコンピュータトモグラフィの準備をする。

コンピュータトモグラフィは医用画像処理、リモートセンシング、非破壊検査などへ応用されている技術である。これは理論的にラドン変換で説明することができる。すなわち、一般に d 次元の物体に対するラドン変換と

は、物体を通る超平面上の積分値を求めることにより定められる変換である。例えば2次元画像を撮像するX線CTスキャナの場合は、物体によるX線の吸収率表す関数を f とするとき、物体に対するX線の通過減衰強度を検出し、これをX線が通過した直線に関する f の線積分の値に対応させればよい。本節では、まずラドン変換の定義を述べ、そのいくつかの性質をみる。次にラドン変換の共役作用素として、リースポテンシャルを用いたものと、フィルタリング逆投影法によるものとの2つを述べる。最後に与えられたラドン変換の情報がウェーブレット展開で表されているとき、フィルタリング逆投影法に基づいて像を再構成する方法について紹介する。

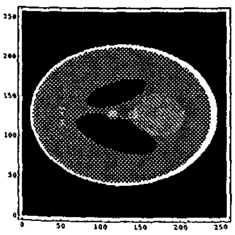
6　数値シミュレーション

本節では、3、4節において述べた我々の方法を、実際にトモグラフィの問題にインプリメントすることを目的とする。ここで、我々の方法に用いるウェーブレットは4階のDaubechiesのウェーブレットとしている。始めに、最も単純な雑音除去問題、すなわち「f を未知の1次元信号、z を白色雑音としたとき、$g_\varepsilon = f + \varepsilon z$ の観測から f を再構成する問題」（実験1）を考える。シミュレーションをより一般的に行なうために、テスト関数として、滑らかなものと区分的に多項式である関数とを取り上げた。ただし、f の台は区間 $[-1,1]$ 内に制限する。このとき我々の理論的議論に基づいて $J = \frac{1}{s+0.5}\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，$M_j = C\sqrt{(j-J)_+}$ (C：定数) とし、パラメータ s と C をいろいろに選んで、ウェーブレット展開で与えられる再構成信号 $\tilde{f}_\varepsilon$ を数値計算により求めた。結果は本論文を参照されたい。

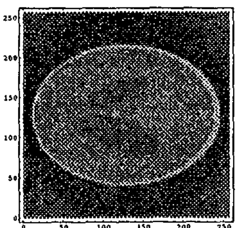
次に2次元のトモグラフィにおける雑音除去の実験（実験2）を行なった。ここでも、滑らかな2次元関数と、トモグラフィの問題でよく用いられるL. SheppとB. Loganにより導入されたヘッドファントムの2種類のテスト画像を選んだ。これらを f で表すとし、その台を単位円内に制限する。このとき、ラドン変換 $R_\theta f$ に白色雑音が混入した信号 $g_{\varepsilon,\theta} = R_\theta f + \varepsilon z$ を観測したと仮定する。そして、

$$\tilde{g}_{\varepsilon,\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < g_{\varepsilon,\theta}, \phi_{0,k} > \phi_{0,k} \quad + \quad \sum_{j<J}\sum_{k\in\mathbb{Z}} < g_{\varepsilon,\theta}, \psi_{j,k} > \psi_{j,k}$$
$$+ \quad \sum_{j\geq J}\sum_{k\in\mathbb{Z}} < g_{\varepsilon,\theta}, \psi_{j,k} > \mathbb{1}_{\{|<g_{\varepsilon,\theta},\psi_{j,k}>|\geq\varepsilon M_j\}}\psi_{j,k}$$

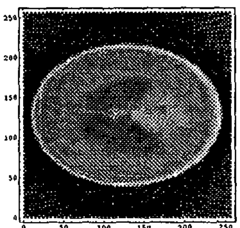
ただし、$J = \frac{1}{s+0.5}\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，$M_j = C\sqrt{(j-J)_+}$ (C：定数) として雑音を除去し、フィルタリング逆投影法を用いて、f の近似画像 $\tilde{f}_\varepsilon$ を構成した。実際にラドン変換 $R_\theta f(r)$ は、$[0,\pi) \ni \theta \to \frac{\pi}{N}n$ $(n = 0,\cdots,N-1)$、$[-1,1] \ni r \to \frac{l}{2^R}$ $(l = -2^R,\cdots,2^R)$ とした離散データとして得られる。以下にテスト関数をヘッドファントム、$N = 64, R = 7$ とした場合の再構成像の一例を示す。



テスト画像



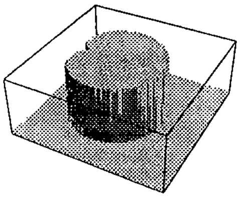
汚染された
ラドン変換からの
再構成画像
($\varepsilon = 0.016$)



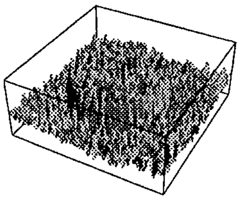
$s = 1.0, C = 1.5$ と
選んだときの
再構成画像

最後に、我々の方法と低域通過フィルタを用いた雑音除去法との比較実験（実験3）を行なった。一般に雑音は高周波成分を多く含むので、低域通過フィルタによりある程度の雑音は取り除くことができるが、同時に高周波領域に含まれる元信号の成分も除かれてしまう。これに対し我々の方法はある閾値関数を導入することで、この成分を保存することが可能になる。

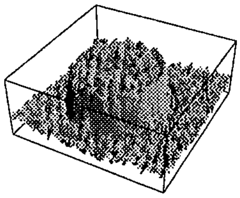
実験 2 と同様、トモグラフィにおける雑音除去問題について、比較実験の結果を以下に示す。ただし、テスト画像は心臓形 (カーディオイド)、$N = 32, R = 6, \varepsilon = 0.02$ としている。



テスト画像



低域通過フィルタを
用いた再構成画像



我々の方法で
$s = 1.0, C = 2.0$ と選
んだときの
再構成画像

7 結論

本論文では、一般に $g_\varepsilon = Kf + \varepsilon z$ で表される逆問題について、理論と実践の両面から調べた。

理論的側面においては、f がベゾフ空間に属し、作用素 K がある条件をみたすとき、本論文によるウェーブレットを用いた非線形近似から作られる再構成信号 $\tilde{f}_\varepsilon$ の誤差を、次のように評価することができた。すなわち、z が決定的雑音であるときは

$$\left\|f - \tilde{f}_\varepsilon\right\|_{B^{s_2}_{p1}} \leq C\,\varepsilon^{\frac{s_1-s_2}{\alpha+s_1-s_3}} \quad ,$$

z が確率的雑音であるときは、期待値をとった形で

$$E\left[\left\|f - \tilde{f}_\varepsilon\right\|^p_{B^{s_2}_{pp}}\right] \leq C\,\varepsilon^{\frac{p(s_1-s_2)}{\alpha+s_1-s_3}}$$

と評価できた。ここで、K に対する条件は D. Donoho らのものより緩いということを注意しておく。さらに z が白色雑音、Lévy 雑音の場合、或るベゾフ空間に almost surely の意味で属することを示し、結果として z が決定的雑音である場合と同じ評価を得た。

実践においては、特にコンピュータトモグラフィにおける雑音除去のシミュレーションを行なった。その結果、パラメータ s と C をうまく選ぶことによって我々の方法が雑音除去に効果的に働くことをみた。さらに、低域通過フィルタを用いる方法に比べて、我々の方法はよりよく雑音を取り除くことをみた。また、観測データをつくり出すためにラドン変換を数値的に求める際に、定数 N と R をできるだけ大きく選ばないと精度よく求めることができないが、そうするとシミュレーションの実行を遅くすることになる。我々は専用の計算機を用いずに、汎用機を使ってこれらの実験を行なった。その仕様は、CPU:Intel Pentium II 333MHz、メモリ:128MB、OS:FreeBSD 2.2.7-R であり、全てのプログラムは C 言語で作成し、gnu C コンパイラを用いた。数値実験に要した時間は次のとおりである。

実験	テスト関数	R	N	実行時間
実験 1	滑らかな関数	8	-	約 40 秒
	区分的多項式関数	8	-	約 40 秒
実験 2	滑らかな関数	6	32	約 20 分
	ヘッドファントム	7	64	約 3 時間
実験 3	低域通過フィルタを用いた方法	6	32	約 10 分
	我々の方法	6	32	約 20 分

論文審査の結果の要旨

雑音に汚染された観測データから、元の情報をできるだけ忠実に再現したい、という逆問題においては、従来フーリエ展開によるフィルタリングなどが用いられてきた。ところが元の情報が連続でない不規則な関数で表現される場合には、雑音の除去とともに必要な情報も消失してしまうという危険性が高かった。著者は、時間—周波数の同時解析に優れたウェイヴレット展開に着目し、元の関数と雑音に適応した閾値関数を工夫することによって、より良い近似関数を非線形操作で構成した。さらに、この方法をコンピュータトモグラフィに応用する研究を行ってきた。本論文は、その研究成果をまとめたもので、全編7章よりなる。

第1章は序論である。

第2章ではウェイヴレットとベゾフ空間についての準備を述べている。ベゾフノルムというのは、通常の積分ノルムの一般化であり、ウェイヴレット展開係数で特徴付けできることに着目している。

第3章では、雑音が確率的ではない場合を扱っている。対象となる観測に対応する作用素に課される条件は従来のものよりも弱められていて、これは理論上興味深い。応用上も有用になる可能性がある。また、ウェイヴレット係数に対する閾値関数の、或る意味で最適な具体的構成法を与え、一般のベゾフノルムで精密な誤差評価を行っていることは高く評価できる。

第4章では確率的雑音の場合を述べている。取り扱う雑音に対する自然な十分条件を与えて、白色雑音と限らない一般の場合にも結果を拡張した。ここではウェイヴレット展開係数ごとの非線形操作を用いて、元の関数の最良近似が構成できることが証明されている。これらは応用上も重要な理論的成果といえる。

第５章ではコンピュータトモグラフィに応用するために、観測データとしては関数のラドン変換に雑音が加わったものを対象としている。ウェイヴレット解析をコンピュータトモグラフィなどの生体情報解析に応用する、という今後の情報数理学における発展の可能性を示唆しており、興味深いと考えられる。

第6章では、前章までの理論的考察に基づき、実際に数値シミュレーションを行っている。種々のテスト画像を選んで雑音除去を行うことにより、理論的考察で示された方法が従来の低域通過フィルタに比べて、実際に、よりよい近似画像を与えることを確認している。これは重要な知見であり、評価できる。

第7章は結論である。

以上、要するに本論文は、雑音に汚染された複雑な観測データから元の情報を取り出すために、ウェイヴレット展開を用いて最良の非線形近似を構成する方法を確立したものであり、情報基礎科学及び数値調和解析学の発展に寄与することが少なくない。

よって本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。